Portfolioverluste bei plötzlichen Kurssprüngen beim Hedgen von Optionen

Betreuer: Lars Grüne

Michael Heinrich Baumann

Universität Bayreuth

Dornbirn, 12. März 2015

Motivation

Hedging im diskretisierten Black-Scholes-Modell:

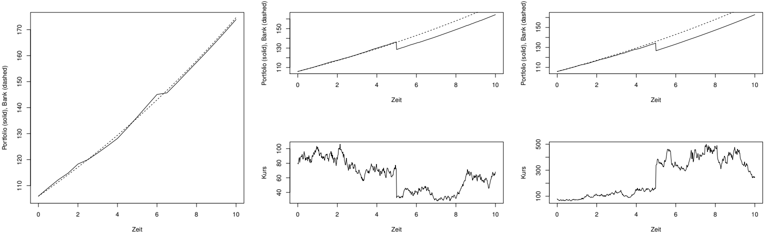


Abbildung : Verschiedene Entwicklungen des Hedgingportfolios: Im Normalfall (links) verhält sich das diskrete Hedgingportfolio im Mittel wie der Bond.

Simulation plötzlicher Kurssprünge:

- Plötzlicher Kursabfall (Mitte)
- Plötzlicher Kursanstieg (rechts)

Inhalt

- Europäische Call-Option
- Ein-Perioden Binomialbaum
- Analyse im Ein-Perioden Baum
- Geometrische Brownsche Bewegung
- Black-Scholes-Formel (BS)
- Analyse im BS-Modell
- Mögliche Abhilfe

Europäische Call-Option (1)

Eine Europäische Call-Option V stellt das Recht (aber nicht die Pflicht) dar, ein Finanzprodukt S zum Ausübungszeitpunkt T zu einem festgelegten Preis K zu kaufen.

$$V(T) = \max\{S(T) - K, 0\} =: (S(T) - K)^+$$

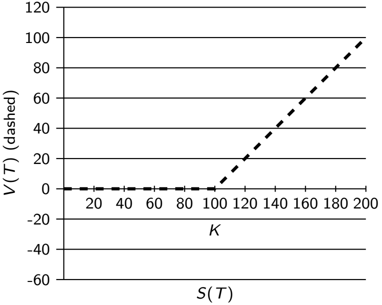


Abbildung : Wert $V(T)$ einer Option V auf S zum Zeitpunkt $t = T$ in Abhängigkeit von $S(T)$.

Europäische Call-Option (2)

$$V(T) = (S(T) - K)^+$$

Was kostet die Option $V(t)$ heute?

Anwendungen

- Spekulation
  - Potentiell (viel) höhere Rendite
  - Niedrigere Markteintrittsbarriere
- Absicherung
  - Bessere Verlustdeckelung
  - Robustheit gegenüber Kursschwankungen

Ein-Perioden Binomialbaum (1a)

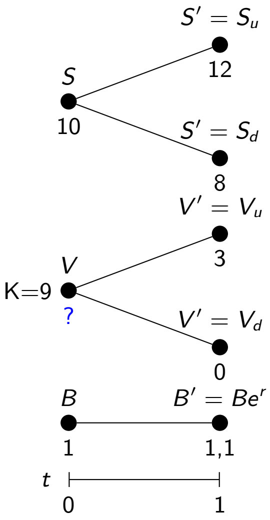


Abbildung : Option im Binomialbaum.

- $S \to S' \in \{S_d, S_u\}$
- $B \to B' = Be^r$
- $r > 0$
- $S_u > Se^r > S_d$ (Non-Arbitrage)
- $V \to V' = (S' - K)^+$
- $S_u > K > S_d$

Hedging im Ein-Perioden Binomialbaum

Absicherung für alle möglichen Fälle, das heißt,
wir suchen $(\Delta, \beta) \in \mathbb{R}^2$ so, dass:

$$\begin{aligned} &\Delta S_u + \beta B' = V_u \\ \wedge\ &\Delta S_d + \beta B' = V_d \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist lösbar und es gilt:

$$\Pi' := -V' + \Delta S' + \beta B' \equiv 0 \text{ für } S' \in \{S_u, S_d\}$$

Die Bank muss in $t = 0$ Δ Anteile von S und β Anteile von B kaufen, um sich gegen Risiken abzusichern:

$$V := \Delta S + \beta B$$

Ein-Perioden Binomialbaum (1b)

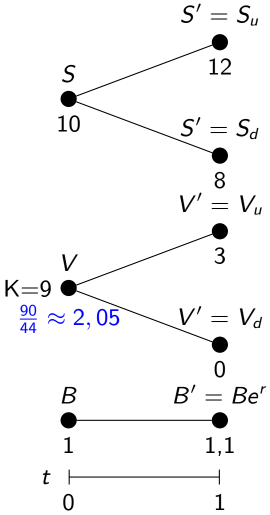


Abbildung : Option im Binomialbaum.

- $S \to S' \in \{S_d, S_u\}$
- $B \to B' = Be^r$
- $r > 0$
- $S_u > Se^r > S_d$ (Non-Arbitrage)
- $V \to V' = (S' - K)^+$
- $S_u > K > S_d$

Analyse im Ein-Perioden Baum

$V' \equiv \Delta S' + \beta B'$ für $S' \in \{S_u, S_d\}$

$\Pi' = -V' + \Delta S' + \beta B'$

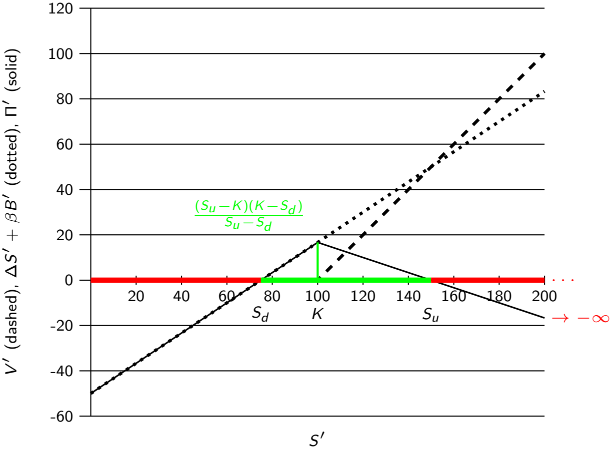


Abbildung : Wert des Hedingportfolios Π' Ausübungszeitpunkt in Abhängigkeit von S'.

Geometrische Brown'sche Bewegung (1)

Die geometrische Brown'sche Bewegung ist die Basis des Black-Scholes-Modells.

Kursentwicklung als Lösung der (Itô-)Stochastischen Differentialgleichung

$$\mathrm{d}S = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t,$$

mit $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ der Trend, $\sigma > 0$ die Volatilität und W_t ein Wiener-Prozess:

$$S(t, S_0) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

($\mu = r$ (Non-Arbitrage), $S_0 > 0$)

Geometrische Brown'sche Bewegung (2)

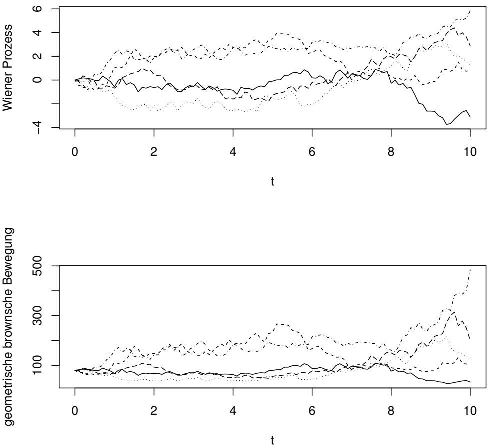


Abbildung : Fünf zufällige Pfade des Wiener Prozesses und die entsprechenden Pfade der geometrischen Brown'schen Bewegung.

Black-Scholes-Modell (1)

Mit Hilfe des Itô-Lemmas kann man die Black-Scholes-Formel

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} = 0$$

zeigen. Diese partielle Differentialgleichung ist nicht (!) stochastisch, da

$$\Delta(t) := \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))$$

in der Herleitung gesetzt wurde. Für die Europäische Call-Option sind die Gleichungen für $V(t, S)$ und $\Delta(t, S(t))$ explizit lösbar.

Black-Scholes-Modell (2)

$$V(t,S) = S\Phi(a) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(b)$$

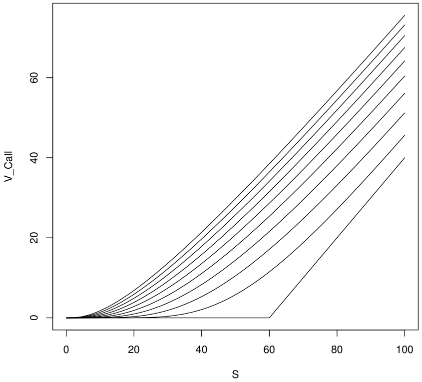


Abbildung : Optionswert $V(t,S)$ in Abhängigkeit von S und t. Von $t=0$ (oben) äquidistant bis $t=T$ (unten).

Analyse des Portfolioverlustes (1)

Wir betrachten das selbstfinanzierte Hedgingportfolio

$$\Pi(i) = -V(i) + \Delta(i)S(i) + \beta(i)B(i),$$

mit festverzinslichem B und V sowie Δ aus der Black-Scholes-Gleichung $(\{0, \tau, 2\tau, \dots, T\} \hat{=} \{0, 1, 2, \dots, N\})$.

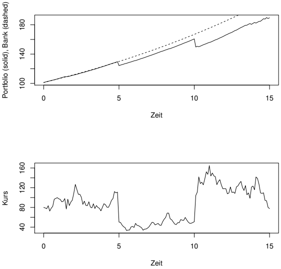
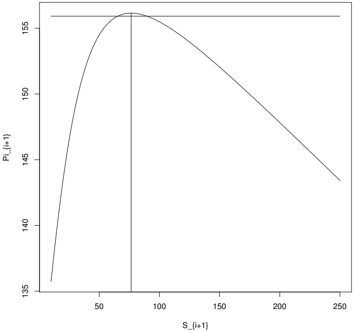


Abbildung : Hedgingportfolioentwicklung im Vergleich zur Entwicklung des Bonds mit Kurssprüngen bei $t = 5$ und $t = 10$.

Analyse des Portfolioverlustes (2)

$$\Pi(i+1, S(i+1)) = -V(i+1, S(i+1)) + \Delta(i)S(i+1) + \beta(i)B(i+1)$$



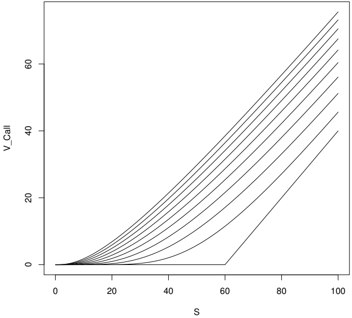


Abbildung : Abhängigkeit zwischen Π_{i+1} und S_{i+1}, wobei S_i und Π_i eingezeichnet sind.

Interpretation und Abhilfeidee

Interpretation

Kunde kauft Optionen um sich gegen Kursschwankungen abzusichern. Dieses Risiko trägt nun die Emittentin der Option.

Abhilfe

Gibt es wirklich Kurssprünge, oder sind das nur beliebig steile Kursänderungen?
Durch eine Verfeinerung des Zeitgitters können Kursänderungen auf viele Perioden aufgeteilt werden.

Abhilfe (1)

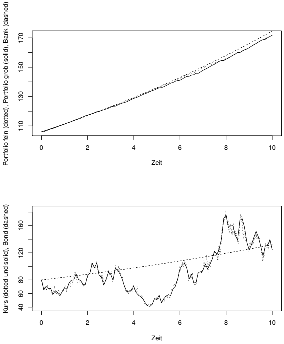


Abbildung : Hedging mit verschieden feinem Zeitgitter: $\tau_{fein} = 0,01$ und $\tau_{grob} = 0,1$.

Abhilfe (2)

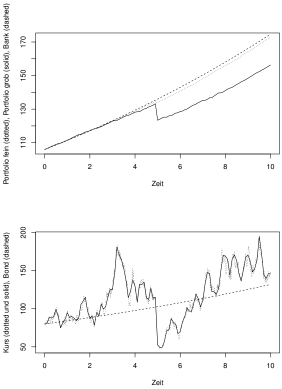


Abbildung : Hedging mit verschieden feinem Zeitgitter und Kursabfall bei $t = 5$: $\tau_{fein} = 0,01$ und $\tau_{grob} = 0,1$.

Der Kursverlust wurde gleichmäßig auf zehn Zeitpunkte verteilt.

Referenzen

- H. Föllmer, A. Schied: Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time. De Gruyter Graduate 2011
- M. Günther and A. Jüngel: Finanzderivate mit MATLAB®. Springer Vieweg 2010
- D. J. Higham: An introduction to financial option valuation, Mathematics, stochastics and computation. Cambridge University Press 2004
- P. E. Kloeden and E. Platen: Numerical Solution of Stochastic Diferential Equations. Springer Verlag 1992
- R. U. Seydel: Tools for computational finance. Universitext Springer 2012

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Michael Heinrich Baumann
michael.baumann@uni-bayreuth.de